

# МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский государственный экономический университет»



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной деятельности

В.Г. Шубаева

2023 г.

## Функциональный анализ

### Рабочая программа дисциплины

Направление подготовки/  
Специальность

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) программы/

Прикладная математика и информатика в экономике и управлении

Специализация

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Форма обучения

очная

Год набора

2023

Составитель(и):

к.физмат.н, Ильин Юрий Анатольевич

Часов по учебному плану	144	<b>Виды контроля в семестрах:</b>  Экзамен: семестр 5
в том числе:		
контактная работа	64	
самостоятельная работа	44	
практическая подготовка	0	
часов на контроль	36	

#### Распределение часов дисциплины:

Семестр:	5
Вид занятий	Часы
Лекционные занятия	36
Практические занятия	28
Лабораторные работы	
<b>Итого аудиторных часов</b>	<b>64</b>
Самостоятельная работа	44
Часы на контроль	36
<b>Итого академических часов</b>	<b>144</b>
<b>Общая трудоемкость в зачетных единицах</b>	<b>4</b>

Санкт-Петербург  
2023

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>3</b>
<b>2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ .....</b>	<b>3</b>
<b>3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ* .....</b>	<b>3</b>
<b>5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....</b>	<b>4</b>
<b>5.1 Рекомендуемая литература .....</b>	<b>4</b>
<b>5.2 Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в     т.ч. отечественного производства .....</b>	<b>4</b>
<b>5.3 Перечень информационных справочных систем (ИСС) и современных     профессиональных баз данных (СПБД).....</b>	<b>5</b>
<b>6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>5</b>
<b>7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....</b>	<b>6</b>
<b>8. ОСОБЕННОСТИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ .....</b>	<b>7</b>
<b>ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ.....</b>	<b>9</b>
<b>1.1 Контрольные вопросы и задания к промежуточной аттестации .....</b>	<b>9</b>
<b>1.2 Темы письменных работ.....</b>	<b>10</b>
<b>1.3 Контрольные точки .....</b>	<b>10</b>
<b>1.4 Другие объекты оценивания .....</b>	<b>10</b>
<b>1.5 Самостоятельная работа обучающегося .....</b>	<b>10</b>
<b>1.6 Шкала оценивания результата .....</b>	<b>10</b>

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

<b>Цель:</b>	Предоставление необходимых сведений по функциональному анализу, являющемуся одним из самых мощных разделов современной математики, представляющему собой обобщение многих понятий и результатов, доказанных в предыдущих математических курсах и позволяющему взглянуть на них с единой общей точки зрения.
--------------	---

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина Б1.О Функциональный анализ относится к обязательной части Блока 1.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Код и наименование компетенции выпускника	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 - Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.7 - Способен применять в профессиональной деятельности фундаментальные знания функционального анализа	<p>Знать: что такое ФАН и каковы его цели</p> <p>Уметь: решать соответствующие задачи.</p> <p>Владеть: соответствующими методами.</p>

## 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ\*

Номер и наименование тем и/или разделов/тем	Содержание дисциплины	Объем дисциплины (академические часы)			
		Контактная работа			СРО
		ЗЛТ	ПЗ	ЛР	
Тема 1. Линейные нормированные пространства	1.1. Определения линейного пространства метрики, нормы, полноты. Полнота некоторых конкретных пространств. Сходимость и норма. 1.2. Пространства Лебега. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. 1.3. Непрерывность. Принцип сжимающих отображений.	10	6		12
Тема 2. Линейные операторы и	2.1. Линейные операторы. Пространство $L(X,Y)$ . 2.2. Линейные непрерывные функционалы. 2.3. Интегральные операторы в $L_p$ . 2.4. Разрешимость	10	10		12

функционалы	операторных уравнений.				
Тема 3. Гильбертовы пространства	3.1. Скалярное произведение. Ортогональность. Ортогональные проекторы. Существование ортогонального базиса. Гильбертово пространство. 3.2. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Теорема Рисса-Фишера. 3.3. Интегральные операторы в Гильбертовом пространстве. Теорема Рисса. 3.4. Сопряженный оператор. Собственные числа и вектора.	8	8		12
Тема 4. Компактность. Аппроксимации.	4.1. Компактные и относительно компактные множества в банаховом пространстве. Лемма Арцела-Асколли. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации многочленами. 4.2. Компактные операторы. Теорема Шаудера. Альтернатива Фредгольма.	8	4		8
<b>Контроль:</b>					<b>36</b>
<b>Всего по дисциплине:</b>		<b>36</b>	<b>28</b>	<b>0</b>	<b>44</b>

\*ЗЛТ – занятия лекционного типа, ПЗ – все виды занятий семинарского типа, кроме лабораторных работ, ЛР – лабораторные работы, СРО – самостоятельная работа обучающегося

## 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 5.1 Рекомендуемая литература

Библиографическое описание издания (автор, заглавие, вид, место и год издания, кол. стр.)	Электронные ресурсы
1.-Павлов, Е.А. Основы функционального анализа : учебное пособие / Е.А. Павлов. — 2-е изд., стер. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 88 с. —ЭБС Лань.	<a href="https://e.lanbook.com/book/116362">https://e.lanbook.com/book/116362</a>
2.-Ревина С.В. Функциональный анализ в примерах и задачах : учебное пособие .— Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета (ЮФУ), 2009 .— 120 с.	<a href="http://znanium.com/go.php?id=556115">http://znanium.com/go.php?id=556115</a>
3.-Леонтьева Т.А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями : учебное пособие .— Москва : ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2013 .— 164 с.	<a href="http://znanium.com/go.php?id=377270">http://znanium.com/go.php?id=377270</a>

### 5.2 Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в т.ч. отечественного производства

- 7-Zip
- LibreOffice
- ОС Альт образование 10

### 5.3 Перечень информационных справочных систем (ИСС) и современных профессиональных баз данных (СПБД)

№	Наименование СПБД/ ИСС
1.	Электронная библиотека Grebennikon.ru – <a href="http://www.grebennikon.ru">www.grebennikon.ru</a>
2.	Научная электронная библиотека eLIBRARY – <a href="http://www.elibrary.ru">www.elibrary.ru</a>
3.	Научная электронная библиотека КиберЛеника – <a href="http://www.cyberleninka.ru">www.cyberleninka.ru</a>
4.	База данных ПОЛПРЕД Справочники – <a href="http://www.polpred.com">www.polpred.com</a>
5.	База данных OECD Books, Papers & Statistics на платформе OECD iLibrary <a href="http://www.oecd-ilibrary.org">www.oecd-ilibrary.org</a>
6.	Справочная правовая система КонсультантПлюс (инсталлированный ресурс СПБГЭУ или <a href="http://www.consultant.ru">www.consultant.ru</a> )
7.	Справочная правовая система «ГАРАНТ» (инсталлированный ресурс СПБГЭУ или <a href="http://www.garant.ru">www.garant.ru</a> )
8.	Информационно-справочная система «Кодекс» (инсталлированный ресурс СПБГЭУ или <a href="http://www.kodeks.ru">www.kodeks.ru</a> )
9.	Электронная библиотечная система BOOK.ru - <a href="http://www.book.ru">www.book.ru</a>
10.	Электронная библиотечная система ЭБС ЮРАЙТ – <a href="http://www.urait.ru">www.urait.ru</a>
11.	Электронно-библиотечная система ЗНАНИУМ (ZNANIUM) – <a href="http://www.znanium.com">www.znanium.com</a>
12.	Электронная библиотека СПБГЭУ – <a href="http://opac.unecon.ru">opac.unecon.ru</a>

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ) групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Помещения оснащены оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

Наименование учебных аудиторий, перечень	Адрес (местоположение) учебных аудиторий
Ауд. 2064 Учебная аудитория (для проведения занятий лекционного типа и	191023, г. Санкт-

занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации), оборудована мультимедийным комплексом. Специализированная мебель и оборудование: Учебная мебель на 90 посадочных мест, рабочее место преподавателя, доска меловая (3-х секционная) - 1 шт., кафедра - 1 шт., стол - 1 шт., стул - 2 шт., Компьютер Intel i3-2100 2.4 Ghz/500/4/Acer V193 19" - 1 шт., Колонки Hi-Fi PRO MASK6T-W (2 шт.) - 1 шт., Микшер-усилитель AA-120 Roxton - 1 шт., Микшер усилитель ТА-1120-1 шт. в комплекте с Behringer XM8500 ULTRAVOICE - 1 шт., Экран с электроприводом ScreenMedia Champion 244x183см (SCM-4304) - 1 шт., Проектор NEC M350 X с дополн. компл. - 1 шт., Стол преподавателя размер столешницы 1200*750мм - 1 шт. Наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий: мультимедийные приложения к лекционным курсам и практическим занятиям, интерактивные учебно-наглядные пособия.	Петербург, ул. Канал Грибоедова, 30/32, литер «А», «Б», «Р»
Ауд. 2032 Компьютерный класс (для проведения практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ) с применением вычислительной техники). Оборудован мультимедийным комплексом. Специализированная мебель и оборудование: Учебная мебель на 25 посадочных мест, рабочее место преподавателя (стол 1шт., кресло 1шт.), доска маркерная на колесиках 1 шт., маркерная доска на ножках 1шт., вешалки стойки 1шт., стол 2шт., стульев 4шт., доска объявлений 1шт., жалюзи 2шт., Компьютер Intel I5-7400/16Gb/1Tb/ видеокарта NVIDIA GeForce GT 710/Монитор. DELL S2218H - 25 шт., Интерактивная доска SMARTB 680 - 1 шт., Шкаф телекоммуникационный настенный ЦМО ШРН-Э-6.650 - 1 шт., Коммутатор ProCurve Switch 2626 - 1 шт., Терминальная станция тонкий клиент в составе Sun Ray 2 client - 1 шт., Стойка для интерактивной доски 660x680 - 1 шт. Наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий: мультимедийные приложения к лекционным курсам и практическим занятиям, интерактивные учебно-наглядные пособия.	191023, г. Санкт-Петербург, ул. Канал Грибоедова, 30/32, литер «А», «Б», «Р»
Ауд. 3024 Лаборатория кафедры банков, финансовых рынков и страхования. Специализированная мебель и оборудование: Учебная мебель на 26 посадочных мест (столов 13шт., стульев 26шт.) рабочее место преподавателя, доска маркерная на колесиках 1шт., стол 1шт., стул 1шт., книжный шкафы 3шт., книжный шкафы с антресолями 3шт., тумба 2шт., вешалка стойка 1шт., доска объявлений 1шт. Телефон IP Cisco IP Phone 7911G - 1 шт. Переносной мультимедийный комплект: Ноутбук HP 250 G6 1WY58EA, Мультимедийный проектор LG PF1500G. Наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий: мультимедийные приложения к лекционным курсам и практическим занятиям, интерактивные учебно-наглядные пособия.	191023, г. Санкт-Петербург, ул. Канал Грибоедова, 30/32, литер «А», «Б», «Р»

## 7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Приступая к изучению дисциплины, обучающемуся необходимо ознакомиться со следующими документами:

- учебно-методической документацией;
- локальными нормативными актами, регламентирующими основные вопросы организации и осуществления образовательной деятельности, в том числе регламентирующие порядок проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся;
- графиком консультаций сотрудников профессорско-преподавательского состава.

Уровень и глубина освоения дисциплины определяются активной и систематической работой обучающихся на лекционных занятиях, занятиях семинарского типа, выполнением самостоятельной работы, в том числе в части выделения наиболее значимых и актуальных проблем для дальнейшего изучения. Особым условием качественного освоения дисциплины является эффективная организация труда, позволяющая распределить учебную нагрузку равномерно в соответствии с графиком учебного процесса.

При подготовке к учебным занятиям обучающимся предоставляется возможность посещения консультаций сотрудников профессорско-преподавательского состава СПбГЭУ согласно расписанию, установленному в графике консультаций.

Аудиторная и внеаудиторная работа обучающихся должна быть направлена на формирование:

- фундаментальных основ мировоззрения обучающихся и естественнонаучного познания;
- базисных знаний, соответствующих направлению подготовки и заявленной профессиональной области, формирующих целевую и профессиональную основу для подготовки кадров;
- профессиональных компетенций ориентированных на удовлетворение потребностей рынка труда;
- индивидуальной траектории посредством освоения уникального набора профессиональных компетенций дополняющих компетентностную модель обучающегося, за счет ориентации на конкретные профессиональные специализированные области знаний, определяемые представителями рынка труда;
- метанавыков обучающихся, таких как: командная работа и лидерство, анализ данных, цифровые навыки, разработка и реализация проектов, межкультурное взаимодействие.

## **8. ОСОБЕННОСТИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ**

Обучение обучающихся с ограниченными возможностями здоровья при необходимости осуществляется на основе адаптированной рабочей программы с использованием специальных методов обучения и дидактических материалов, составленных с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся (обучающегося).

В целях освоения учебной программы дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья Университет обеспечивает:

- для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по зрению: размещение в доступных для обучающихся, являющихся слепыми или слабовидящими, местах и в адаптированной форме справочной информации о расписании учебных занятий; присутствие ассистента, оказывающего обучающемуся необходимую помощь; выпуск альтернативных форматов методических материалов (крупный шрифт или аудиофайлы);

- для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по слуху: надлежащими звуковыми средствами воспроизведение информации;

- для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, имеющих нарушения опорно-двигательного аппарата: возможность беспрепятственного доступа обучающихся в учебные помещения, туалетные комнаты и другие помещения кафедры, а также пребывание в указанных помещениях.

Обучающиеся из числа инвалидов и лиц с ОВЗ обеспечены печатными и (или) электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья. Образование обучающихся с ограниченными возможностями здоровья может быть организовано как совместно с другими обучающимися, так и в отдельных группах или в отдельных организациях.



## ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 1.1 Контрольные вопросы и задания к промежуточной аттестации

01. Определение и примеры линейного пространства.
02. Определение и примеры нормы.
03. Операторная норма и ее свойства.
04. Определение метрики. Метрика и норма. Открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки. Всюду плотное множество.
05. Предел последовательности. Фундаментальная последовательность. Полное пространство. Примеры. Определение Банахового пространства.
06. Пространство Чебышева  $C[a,b]$  и его полнота. Сепарабельность.
07. Пространство  $C^1[a,b]$ .
08. Непрерывные отображения. Сжимающие отображения. Примеры (обязательно теорема Пикара из диф. ур.).
09. Теорема о сжимающем отображении.
10. Линейный оператор. Примеры.
11. Определение ограниченного оператора. Норма оператора.
12. Формулы для нормы оператора.
13. Непрерывные линейные операторы. Свойства. Связь с ограниченностью.
14. Ядро оператора. Биективность. Обратный оператор. Примеры.
15. Различные примеры матричных норм.
16. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.
17. Нормы операторов дифференцирования и интегрирования (зависит от пространства! видимо, этот материал раскидан по конспекту).
18. Скалярное произведение. Простейшие свойства. Унитарное пространство.
19. Норма, порождаемая скалярным произведением. Неравенство Коши - Буняковского.
20. Определение гильбертова пространства. Примеры.
- 20а. Понятие пространства Лебега  $L^2[a,b]$  и его дискретного аналога  $l_2$ - пространства последовательностей.
21. Тождество параллелограмма. Формула, восстанавливающая скалярное произведение по норме.
22. Примеры применения тождества параллелограмма (выяснение является ли пространство гильбертовым или нет).
23. Ортогональность. Простейшие свойства. "Теорема Пифагора".
24. Ортогональный ряд. Теорема о сходимости ортогонального ряда.
25. Ряд Фурье как пример ортогонального ряда в  $L^2[a,b]$ .
26. Наилучшее приближение. Теорема о существовании наилучшего приближения.
27. Теорема о проекции.
28. Определения ортогонального и ортонормированного семейства, линейной оболочки. Теорема о единственности разложение по ортогональному семейству.
29. Определение ряда и коэффициентов Фурье. Примеры.
30. Теорема о частичных суммах ряда Фурье. Неравенство Бесселя.
31. Теорема Рисса - Фишера.
32. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Процесс Грама - Шмидта. Теорема об эквивалентности 2х определений сепарабельности (без док-ва).
33. Пример построения ортонормированного базиса в  $L^2[a,b]$  с вычислением проекции и расстояния до линейной оболочки.

34. Классические ряды Фурье на  $[-\pi, \pi]$  или  $[0, 2\pi]$ , по каким функциям, ортогональность функций, формулы коэффициентов.
35. Теорема Рисса о представлении линейных функционалов в гильбертовом пространстве.
36. Сопряженные операторы. Свойства. Связь между ядрами и образами сопряженных операторов (через ортогональное дополнение).
37. Критерий разрешимости линейных операторных уравнений  $Ux=f$ .

## 1.2 Темы письменных работ

Рабочей программой дисциплины не предусмотрено.

## 1.3 Контрольные точки

Номер контрольной точки	Тип контрольной точки	Способ проведения	Номера тем
1	Контрольная работа	письменно	1,2
2	Контрольная работа	письменно	3,4
3	Текущий контроль	с помощью технических средств и информационных систем	1-4

## 1.4 Другие объекты оценивания

Рабочей программой дисциплины не предусмотрено.

## 1.5 Самостоятельная работа обучающегося

Наименования самостоятельной работы	Номера тем
Выполнение домашних заданий	1-4
Подготовка к экзамену	1-4

## 1.6 Шкала оценивания результата

Шкалы оценивания и процедуры оценивания результатов обучения **по дисциплине** регламентируются Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования и Положением о балльно-рейтинговой системе. Для оценки сформированности результатов обучения по дисциплине используется **балльно-рейтинговая система успеваемости обучающихся**:

Формой итогового контроля по дисциплине является экзамен (или дифференцированный зачет), итоговая оценка формируется в соответствии со шкалой, приведенной ниже в таблице:

Баллы	Оценка
-------	--------

<=54	неудовлетворительно
55-69	удовлетворительно
70-84	хорошо
>=85	отлично

### Шкала оценивания результата

2 (балл до 54)	Демонстрирует непонимание проблемы. Многие требования, предъявляемые к заданию не выполнены. Демонстрируется первичное восприятие материала. Работа незакончена и /или это плагиат.
3 (балл 55-69)	Демонстрирует частичное понимание проблемы. Большинство требований, предъявляемых, к заданию выполнены. Владение элементами заданного материала. В основном выполненный материал понятен и носит целостный характер.
4 (балл 70-84)	Демонстрирует значительное понимание проблемы обозначенной дисциплиной. Все требования, предъявляемые к заданию выполнены. Содержание выполненных заданий раскрыто и рассмотрено с разных точек зрения.
5 (балл 85-100)	Демонстрирует полное понимание проблемы. Все требования, предъявляемые к заданию выполнены. Продemonстрировано уверенное владение материалом дисциплины. Выполненные задания носят целостных характер, выполнены в полном объеме, структурированы, представлены различные точки зрения, продемонстрирован творческий подход.