МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Комплект контрольно-оценочных средств по учебной дисциплине

ЕН.01 Математика
(код и название дисциплины)

программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)
(код и название специальности)

Санкт-Петербург
2023 г

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПАСПОРТ
КОС по УД ЕН.01 Математика

(код и название дисциплины)

1.1. Общие положения

Контрольно-оценочные средства (КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины ЕН.01 Математика

КОС включают контрольные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации в форме экзамена (3 семестр)

КОС разработаны в соответствии с:

Образовательной программой СПО по специальности

38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

программы учебной дисциплины ЕН.01 Математика

1.2. Результаты освоения дисциплины, подлежащие проверке

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания, практический опыт (при наличии)	**Наименование элемента умений/знаний**	**Основные показатели оценки результатов**
У1	применять основные понятия и свойства функции одной переменной при решении задач	Применение свойств функции при решении задач
У2	раскрывать неопределённости при вычислении пределов	Вычисление пределов функций
У3	вычислять производную функции одной переменной, производную сложной функции, исследовать функцию при помощи производной и строить график функции	Вычисление производных, исследование функции при помощи производной использование приложения производной к исследованию функции
У4	вычислять неопределённый интеграл методом замены переменной и методом интегрирования по частям, применять формулу Ньютона-Лейбница при вычислении определённого интеграла,	Применение основных формул интегрирования; использование приложения определенного интеграла к вычислению различных величин

	вычислять площадь плоских фигур	
У5	выполнять линейные операции над матрицами, умножение матриц, находить обратные матрицы, вычислять значение определителей, решать СЛУ методом Крамера, методом обратной матрицы	Выполнение операций над матрицами; -владение алгоритмом вычисления определителей первого, второго и третьего порядков; - решение систем линейных уравнений
У6	вычислять количества размещений, перестановок, сочетаний ,применять формулы теории вероятности и математической статистики для решения экономических задач	Решение задач на классическое определение вероятности; на основные теоремы сложения и умножения вероятностей.
У7	применять формулы вычисления простого и сложного процентов для решения экономических задач	решает экономические задачи
З1	основные понятия теории пределов	- Формулировка первого и второго замечательного пределов - Описание методов вычисления пределов в точке и на бесконечности
З2	основные понятия теории производной и её приложение	- Формулировка правил дифференцирования и перечисление производных основных элементарных функций - Перечисление табличных интегралов
З3	основные понятия теории неопределённого и определённого интегралов	Перечисление основных формул интегрирования; знает как использовать приложение определенного интеграла к вычислению различных величин
З4	определение и свойства матриц, определителей,	Перечисление последовательности действий при решении систем линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса

	определения и понятия, относящиеся к СЛУ, необходимые для решения СЛУ	
З5	формулы простого и сложного процентов	Решает задачи с использованием формул
З6	основные понятия теории вероятности и математической статистики необходимые для решения экономических задач.	дает классическое определение вероятности; -формулирует основные теоремы сложения и умножения вероятностей; -формулирует закон распределения случайной величины; -знает основные понятия математической статистики, группирует статистические данные

1.3. Распределение оценивания результатов обучения по видам контроля

Код и наименование элемента умений или знаний	**Виды аттестации**	
	Текущий контроль	*Промежуточная аттестация*
У1-применять основные понятия и свойства функции одной переменной при решении задач	тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
У2-раскрывать неопределённости при вычислении пределов	тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
У3-вычислять производную функции одной переменной, производную сложной функции, исследовать функцию при помощи производной и строить график функции	тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
У4-вычислять неопределённый интеграл методом замены переменной и методом интегрирования по частям, применять формулу Ньютона-Лейбница при вычислении определённого интеграла, вычислять площадь плоских фигур	тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
У5-выполнять линейные операции над матрицами, умножение матриц, находить обратные матрицы, вычислять значение определителей, решать СЛУ методом Крамера, методом обратной матрицы	тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
У6-вычислять количества размещений, перестановок, сочетаний ,применять формулы теории вероятности и математической статистики для решения экономических задач	тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
У7-применять формулы вычисления простого и сложного процентов для решения экономических задач	тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).

З1-основные понятия теории пределов	Устный опрос тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
З2-основные понятия теории производной и её приложение	Устный опрос тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
З3-основные понятия теории неопределённого и определённого интегралов	Устный опрос тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
З4-определение и свойства матриц, определителей, определения и понятия, относящиеся к СЛУ, необходимые для решения СЛУ	устный опрос, тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
З5-формулы простого и сложного процентов	устный опрос, тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).
З6-основные понятия теории вероятности и математической статистики необходимые для решения экономических задач.	устный опрос, тестирование, оценка выполнения практического занятия	Экзамен (3 семестр).

1.4. Распределение типов оценочных средств по элементам знаний и умений текущего контроля

Содержание учебного материала по программе УД	Тип контрольного задания												
	У1	**У2**	**У3**	**У4**	**У5**	**У6**	**У7**	**З1**	**З2**	**З3**	**З4**	**З5**	**З6**
Раздел 1. Математический анализ алгебры													
Тема 1.1 Функция одной переменной.	6,7												
Тема 1.2 Пределы и непрерывность функции		6,7						6,7					
Тема 1.3 Производная и её приложение			6,7						6,7				
Тема 1.4 Неопределённый интеграл				6,7						6,7			
Тема 1.5 Определённый интеграл				6,7						6,7			
Раздел 2. Линейная алгебра													
Тема 2.1 Матрицы и определители					6,7						6,7		
Тема 2.2 Системы линейных уравнений (СЛУ)											6,7		
Раздел 3. Основы теории вероятности, комбинаторики и математической статистики													
Тема 3.1 Основные понятия теории вероятности и комбинаторики						6,7							6,7
Тема 3.2 Элементы математической статистики						6,7							6,7
Раздел 4. Основные математические методы в профессиональной деятельности													
Тема 4.1 Применение методов математического анализа при решении экономических задач							6,7						
Тема 4.2 Простейшее приложение линейной алгебры в экономике							6,7					6,7	

1.5. Распределение типов оценочных средств по элементам знаний и умений, контролируемых на промежуточной аттестации

Содержание учебного материала по программе УД	Тип контрольного задания												
	У1	**У2**	**У3**	**У4**	**У5**	**У6**	**У7**	**З1**	**З2**	**З3**	**З4**	**З5**	**З6**
Раздел 1. Математический анализ алгебры													
Тема 1.1 Функция одной переменной.	9												
Тема 1.2 Пределы и непрерывность функции		9						9					
Тема 1.3 Производная и её приложение			9						9				
Тема 1.4 Неопределённый интеграл				9						9			
Тема 1.5 Определённый интеграл				9						9			
Раздел 2. Линейная алгебра													
Тема 2.1 Матрицы и определители					9						9		
Тема 2.2 Системы линейных уравнений (СЛУ)					9						9		
Раздел 3. Основы теории вероятности, комбинаторики и математической статистики													
Тема 3.1 Основные понятия теории вероятности и комбинаторики						9							
Тема 3.2 Элементы математической статистики						9							
Раздел 4. Основные математические методы в профессиональной деятельности													
Тема 4.1 Применение методов математического анализа при решении экономических задач							9						9
Тема 4.2 Простейшее приложение линейной алгебры в экономике							9					9	

2. СПЕЦИФИКАЦИЯ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Назначение2.1

Спецификацией устанавливаются требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

Практическая работа предназначена для *текущего контроля* и оценки знаний и умений студентов по программе учебной дисциплины ЕН.01 МАТЕМАТИКА образовательной программы СПО по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

2.2 **Контингент аттестуемых:** *(студенты 2 курса).*

2.3 Форма и условия аттестации: текущий контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы

(Аттестация проводится в форме экзамена (3 семестр) по завершению освоения учебного материала учебной дисциплины, при положительных результатах текущего контроля.)

2.4 Время выполнения:

подготовка____5______ мин;
выполнение ____0 час _____40__ мин;
оформление и сдача __мин.
всего ___час __45___ мин.

2.5Рекомендуемая литература для разработки оценочных средств и подготовки, обучающихся к аттестации.

Библиографическое описание издания (автор, заглавие, вид, место и год издания, кол. стр.)	**Основная/ дополнительная литература**	**Книгообеспеченность**	
		Кол-во. экз. в библ. СПбГЭУ	**Электронные ресурсы**
Бардушкин, В. В. Математика. В 2-х томах : Том 1 : учебник. Элементы высшей математики. —Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2019. — 304 с.	осн		ЭБС ZNANIUM
Бардушкин, В. В. Математика. В 2-х томах : Том 2 : учебник. Элементы высшей математики. — Москва : КУРС : ИНФРА-М" 2020. — 368 с.	осн		ЭБС ZNANIUM
Кремер, Н. Ш. Математика для колледжей : учебное пособие для СПО / Кремер Н. Ш., Константинова О. Г., Фридман М. Н. ; под ред. Кремера Н. Ш. — 10-е изд., пер. и доп. — Москва : Юрайт, 2019. — 346 с.	осн		ЭБС Юрайт
Дадаян, А. А. Математика : учебник / Дадаян А. А. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М" 2018. — 544 с.	доп		ЭБС ZNANIUM

Шипова, Л. И. Математика : учебное пособие / Шипова Л. И. — Москва : ИНФРА-М" 2019. — 238 с.	доп		ЭБС ZNANIUM
Дорофеева, А. В. Математика. Сборник задач : учебно-практическое пособие для СПО / Дорофеева А. В. — 2-е изд. — Москва : Юрайт, 2019. — 176 с.	доп		ЭБС Юрайт

3. ВАРИАНТЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Практическая работа

«Нахождение области определения функции»

Цель:

1. Повторить знания обучающихся в теме: «Нахождение области определения функции».
2. Закрепить умения и навыки нахождения области определения функции.

Порядок выполнения:

1. Ознакомиться с теоретическим материалом и решением примеров.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить практическую работу.

Теоретические сведения:

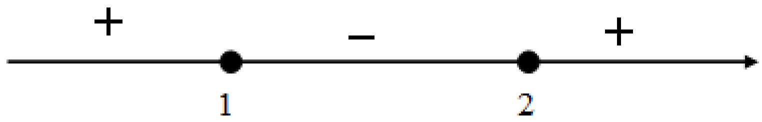
Областью определения или областью задания функции $y = f(x)$ называется множество значений x, для которых существуют значения $y = f(x)$.Обозначается область определения функции — $D(f)$ или $D(y)$.

Схема нахождения области определения функций:

1. Если $f(x)$ представляет собой многочлен, то областью определения функции $y = f(x)$ будет множество всех действительных чисел.
2. Если $f(x)$ — рациональная дробь, то областью является множество всех действительных чисел кроме тех значений E, при которых знаменатель равен нулю.
3. Если функция имеет вид $y = \sqrt{f(x)}$, то областью определения будет множество решений неравенства $f(x) \geq 0$.
4. Если функция имеет вид $y = \frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}$, где $g(x)$ некоторый многочлен, то областью определения будет множество решений неравенства $f(x) > 0$.
5. Область определения суммы, разности или произведения двух или нескольких функций есть пересечение областей определений этих функций, для её отыскания составляется и затем решается система соответствующих условий.

Примеры решения нахождения области определения функции

№ п/п	Пример	Решение
Найти область определения		
1	$y = x^2 + 2 - \frac{3}{x-5}$	Функцию можно представить в виде разности двух функций $y = x^2 + 2 - \frac{3}{x-5} = (x^2 + 2) - \frac{3}{x-5}$ $f_1(x) = x^2 + 2$ $D(f_1(x))$ является множества всех чисел $f_2(x) = \frac{3}{x-5}$ Найдем значения , которые обнуляют знаменатель

		$x-5\neq 0$ $x\neq 5$ Ответ:$D(y): x\epsilon(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$
2	$y = \sqrt{x^2-3x+2}$	Для нахождения области определения $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ решим неравенство $x^2-3x+2\geq 0$ Для этого решим уравнение $x^2-3x+2=0$. Корнями этого уравнения являются числа 2 и 1. Обозначим найденные корни на числовой оси и определим знак неравенства на полученных интервалах.  Ответ: $x\epsilon(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$
3	$y=\dfrac{2x-7}{\sqrt{3x+21}}$	Функция представляет собой дробно-рациональную функцию, в числителе которой многочлен. Область определения многочлена есть множество действительных чисел. $\begin{cases}3x+21\geq 0\\3x+21\neq 0\end{cases}\rightarrow 3x+21>0\rightarrow x>-7$ Ответ: $D(y)$: $x\in(-7;+\infty)$
4	$y=\dfrac{2x}{\sqrt{x}-3}$	Найдет ОДЗ: $x\geq 0$ $\sqrt{x}-3\neq 0$ $\sqrt{x}\neq 3$ $x\neq 9$ Ответ: $D(y)$ $x\in[0;9)\cup(9;+\infty)$

Практической работа:

Найти область определения	
$y=5x-12$	$y=2x+13$
$y=\dfrac{3x}{4x+7}$	$y=\dfrac{2}{5x-11}$
$y=\sqrt{3x+21}$	$y=\sqrt{5x-15}$
$y=\dfrac{1}{\sqrt{2-4x}}$	$y=\dfrac{1}{\sqrt{3+9x}}$
$y=\dfrac{7}{x}+\dfrac{3x}{x^2-9}$	$y=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2x}{x^2-4}$
$y=x^2+\dfrac{1}{x^2+4}$	$y=x^2+\frac{9}{x^2+1}$

Практические работы
по теме «Нахождение предела функции».
« Нахождение области непрерывности и точек разрыва».

Цель: формировать умения вычисления пределов, раскрытия неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ путем разложения на множители, определения непрерывности функции.

Порядок выполнения работы:

1 Рассмотреть теоретический материал по теме и примеры решения задач.
2 Решить самостоятельную работу, выполнив 10 заданий соответствующего варианта. Оформить подробное решение письменно в тетради с указанием ответов.
3 Ответить письменно на контрольные вопросы.

Краткие теоретические сведения по рассматриваемой проблеме, основные характеристики по содержанию практической работы:

Определение. Число **А** называется пределом функции y=f(x) при x, стремящемся к x_0 (в точке x_0), если для любого положительного числа **ε** найдется такое положительное число **δ,** что $|f(x) - A| < \varepsilon$, как только $0 < |x - x_0| < \delta$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Определение. Функция y=f(x) называется бесконечно малой при x, стремящемся к x_0 (в точке x_0), если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Определение. Функция y=f(x) называется бесконечно большой при x, стремящемся к x_0 (в точке x_0), если для любого положительного числа M найдется такое положительное число **δ,** что $|f(x)| > M$, как только $0 < |x - x_0| < \delta$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Определение. Функция y=f(x), заданная на всей числовой прямой, называется бесконечно большой при x, стремящемся к ∞), если для любого положительного числа M найдется такое положительное число T, что $|f(x)| > M$, как только $|x| > T$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Основные теоремы о пределах:

1 $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

2 $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

3 $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

4 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

В простейших случаях вычисление предела функции сводится к подстановке в функцию, стоящую под знаком предела, предельного значения аргумента. Но довольно часто такая подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным значениям вида: $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^{∞}), (0^0), (∞^0). Отыскание предела в этих случаях, называют раскрытием неопределенностей. Для раскрытия неопределенностей преобразуют выражение, стоящее под знаком предела, затем используют теоремы о пределах, замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\mathbf{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$

следствия $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$ или $\mathbf{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)$.

Решение. Подставляем в функцию $y = 2x - 1$предельное значения аргумента x=3, получим $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1) = 2\cdot 3 - 1 = 5$.

Ответ: 5.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-10x-11}{x^2-1}$.

Решение. Подставляем в функцию $y = \frac{x^2-10x-11}{x^2-1}$ предельное значения аргумента x=-1, получим$\left(\frac{0}{0}\right)$. Необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, используя формулы сокращенного умножения, правило разложения квадратного трехчлена на множители ($ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена), метод группировки. Решение записывают в виде:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-10x-11}{x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -1}\frac{(x-11)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-11)}{(x-1)} = \frac{-12}{-2} = 6.$$

Сокращение на (x+1) возможно, так как оно не равно нулю, а лишь стремится к нулю.

Ответ: 6.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{x^2-16}$.

Решение. Подставляем в функцию $y = \frac{3-\sqrt{5+x}}{x^2-16}$ предельное значения аргумента x=4, получим$\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы избавиться от неопределенности, надо функцию умножить на единицу, представив ее в виде дроби, сопряженной к выражению, содержащему корень $3-\sqrt{5+x}$. Запишем решение

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{x^2-16} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{x^2-16}\cdot\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{3^2-\sqrt{5+x}^2}{(x^2-16)(3+\sqrt{5+x})} = \lim_{x\to 4}\frac{4-x}{(x-4)(x+4)(3+\sqrt{5+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{-1}{(x+4)(3+\sqrt{5+x})} = \frac{-1}{8\cdot 6} = -\frac{1}{48}$$

Ответ: -1/48.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{x^3-16x+1}$.

Решение. Подставляем в функцию $y = \frac{2x^2+x+3}{x^3-16x+1}$предельное значения аргумента $x\to\infty$, получим$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы избавиться от неопределенности, надо в числителе и знаменателе вынести множитель, содержащий максимальную степень переменной. Запишем решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{x^3-16x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{2x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{16x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{16}{x^2}+\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{0+0+0}{1-0+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Ответ: 0.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+7}{4x^3+2x+8}$.

Решение. Подставляем в функцию $y=\frac{x^5+7}{4x^3+2x+8}$ предельное значения аргумента $x\to\infty$, получим$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы избавиться от неопределенности, надо в числителе и знаменателе вынести множитель, содержащий максимальную степень переменной. Запишем решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+7}{4x^3+2x+8}.=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{x^5}{x^5}+\frac{7}{x^5}\right)}{x^5\left(\frac{x^3}{x^5}+\frac{2x}{x^5}+\frac{8}{x^5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{7}{x^5}}{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}+\frac{8}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{0+0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

Ответ: ∞.

Определение. Функция y=f(x) называется непрерывной в точкеx_0, если она определена в этой точке и существует конечный предел функции в этой точке, равный значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.Точка, в которой функция не является непрерывной, называется точкой разрыва.

Если функция y=f(x) непрерывна в каждой точке интервала (a, b), то она непрерывна на этом интервале (Рисунок 1).

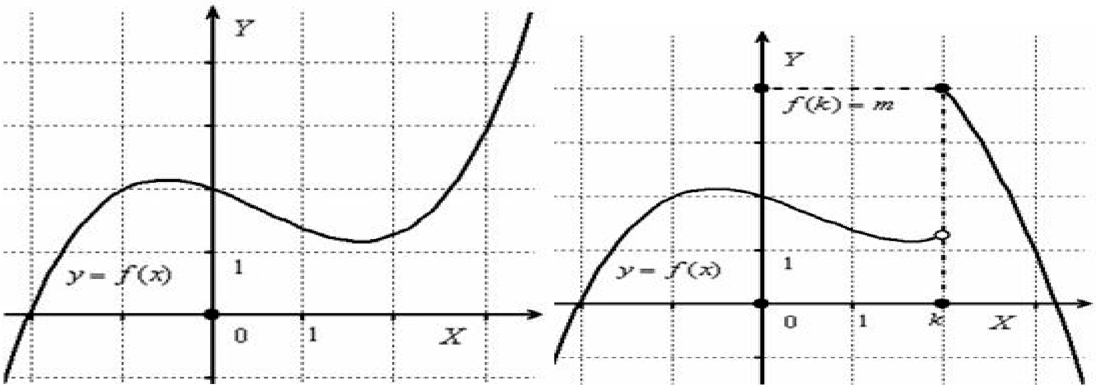


Рисунок 1. Графики непрерывной и разрывной функций

Пример 6. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 2x+1 & \text{при} \quad 0<x<2,\\ x-2 & \text{при} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

и выполним её чертёж.

Строим график:

1) на полуинтервале (-∞; 0] чертим фрагмент параболы $f(x)=x^2+1$,

2) на интервале (0; 2) – отрезок прямой $f(x)=1+2x$,

3) на полуинтервале [2; +∞) – прямую $f(x)=x-2$.

При этом в силу неравенства $x\le 0$ значение $f(0)$ определено для квадратичной функции $f(x)=x^2+1$, и в силу неравенства $x\ge 2$, значение $f(2)$ определено для линейной функции $f(x)=x-2$ (Рисунок 2).

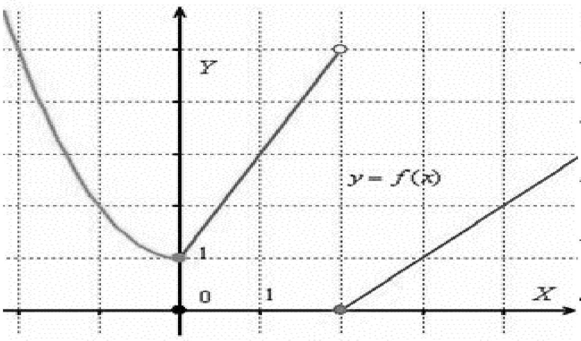


Рисунок 2. График функции примера 6.

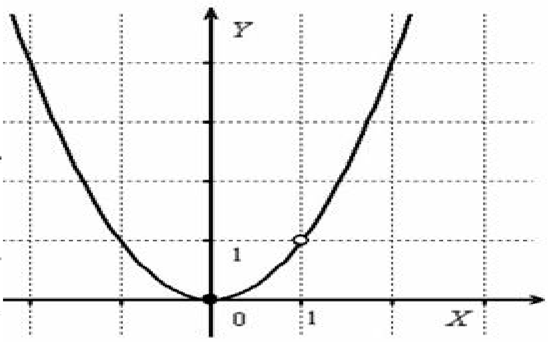


Рисунок 3. График функции примера 7.

Пример 7. Исследовать функцию на непрерывность $y = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$.

Решение. Преобразуем функцию $y = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$, $y = \frac{x^2(x-1)}{x-1}$.
Область определения функции: $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Построим график функции после упрощения дроби $y = x^2$ при $x \neq 1$ (Рисунок 3).Ответ: функция непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x = 1$, в которой она терпит разрыв.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$. 2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$. 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$.

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 3}{2x^2 - x + 7}$. 5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{11x^3 + 5x^2 + 3x - 1}{2x^3 - x + 7}$. 6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$.

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5^x - 1}{5^x + 3}$. 8) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 25}$. 9) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3 - 7x - 2x^2}{x^2 - 8x + 15}$.

10) Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \log_2 x & \text{при} \quad 0 < x < 4, \\ 10 - 2x & \text{при} \quad x \ge 4. \end{cases}$$

Вариант 2

Вычислить пределы.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$. 2) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$. 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 16}{4x^2 + x - 20}$.

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2^x}{2^x + 6}$. 5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{16x + 1}{4x^2 + x - 20}$. 6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin 7x}$.

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^5 - x^3}{4x^2 + 3x - 6}$. 8) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$. 9) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 7x + 2}$.

10) Исследовать на непрерывность и построить график функции.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{при} \quad x<1, \\ 4-2x & \text{при} \quad 1\le x\le 2, \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

Содержание отчета:

1 Тема, цель.
2 Оформление заданий с подробным решением и с указанием ответов.
3 Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы:

1 Какие виды неопределенностей встречались при решении заданий?
2 Сколько может быть точек разрыва?
3 Что значит бесконечно большая функция?
4 Какая функция называется бесконечно малой?
5 Что называется элементарной и неэлементарной функцией?

Практическая работа

Нахождение наибольшего, наименьшего значения функции.

Цель работы:

- применить умения по владению представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей.

Теоретический материал:

Достаточное условие экстремума. Пусть функция y=f(x) непрерывна на промежутке х и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x=x_0$. Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой выполняется неравенство $f'(x)<0$. при $x<x_0$, а при $x>x_0$ - неравенство $f'(x)>0$, то $x=x_0$ - точка минимума;

б)если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x)>0$, а при $x>x_0$ - неравенство $f'(x)<0$, то $x=x_0$ - точка максимума;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева, и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремумов нет.

Алгоритм исследования непрерывной функции y=f(x) на монотонность и экстремумы:

1) Найти производную f '(x)
2) Найти стационарные и критические точки.
3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4) Опираясь на теорему, сделать выводы о монотонности и точках экстремума.

При выполнении практической работы рассмотрите следующие примеры:

Пример 1:

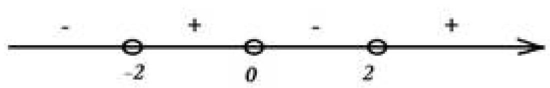
Исследовать функцию $y=\frac{x^4+16}{x^2}$ на экстремумы.

Решение. Функция непрерывна, кроме точки x=0.

1)Найдем производную:

$$f'(x)=\frac{(x^4+16)'\cdot x^2-(x^2)'\cdot(x^4+16)}{(x^2)^2}=\frac{4x^3\cdot x^2-2x(x^4+16)}{x^4}==\frac{2x^5-32x}{x^4}=\frac{2(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x^3}$$

2)x=2 и x=-2 - стационарные точки. При x=0, производная не существует, это точка разрыва.



3)

4) x=-2 - точка минимума, y_{min}=8 x=2 - точка максимума, y_{min}=8.

Алгоритм отыскания наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции y=f(x) на отрезке [a;b]

1)Найти производную f '(x).

2)Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка [a;b].

3)Вычислить значение функции y=f(x) в точках, отображаемых на втором шаге и в точках а и b, выбрать среди этих значений наименьшее ($y_{наим}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб}$).

Пример 2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$y=x^3-3x^2-45x+1$ на отрезке [0;6].
Решение. Воспользуемся алгоритмом

$y'=3x^2-6x-45$ $\quad x = 5 \in [0;6]$

$3x^2-6x-45=0$

$x^2-2x-15=0$

$x_1=-3$, $\quad x_2=5$

$y_{наим}=-174$, $y_{наиб}=1$

Пусть функция y=f(x) непрерывна на промежутке x и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x=x_0$

Тогда:

а) если $x=x_0$ точка максимума, то $y_{наиб}=f(x_0)$

б) если $x=x_0$ точка минимума, то $y_{наим}=f(x_0)$.

Пример 3. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ на луче $[0; +\infty)$.

Решение . $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет. $y'=0$, $1-x^2=0$, $x=1$ или $x=-1$.

Заданному лучу $[0; +\infty) \in x = 1.$ При $x>1$, $y'>0$, а при $x>1$, $y'<0$.

Значит, x = 1 – точка максимума $y_{max} = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$.

x=1 – единственная стационарная точка функции на заданном промежутке, причём точка максимума.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Какая точка называется точкой максимума?
2. Какая точка называется точкой минимума?
3. Перечислите правила дифференцирования.
4. Назовите алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

<u>Задание:</u>

I Вариант	II Вариант
1. Исследовать на экстремум функцию:	
$y = x(x-1)^3$	$y = 2x(x-2)^2$
2. Определить экстремум функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$	2. Определить экстремумы функции $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:	
$y = x^3-3x^2+3x+2$ на отрезке [2;5]	$y = x^4-4x^2+2x-1$ на отрезке [2;3]
4. Какие из данных функций не имеет критических точек	4. Какие из данных функций не имеет критических точек
а) $y=x^4+2x^2+6$	а) $y=x^3+x^2-2$
б) $y = x - \sqrt{x}$	б) $y = \sqrt{x} + x$
в) $y = 3x + 7\sqrt{x}$	в) $y = x + \sqrt[3]{x}$
г) такой нет.	г) такой нет.

<u>Порядок выполнения:</u>

1. Внимательно прочитать тему и цель практической работы.

2. Изучить учебный материал по теме.
3. Ответить на вопросы.
4. Выполнить задания.
5. Подготовить отчет.

Содержание отчета:
Название практической работы.
Учебная цель.
Решение заданий практической работы.
Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Практическая работа

Тема: Исследование функций и построение графиков с помощью производной.

Цель: Учиться проводить исследование функции с помощью производной и строить график функции по результатам проведённого исследования.

Ход работы

1. Ознакомьтесь с теоретической частью;
2. Запишите алгоритм исследования функции;
3. Выполните задания практической части;
4. Ответьте на контрольные вопросы.

Теоретическая часть

При построении графика функции необходимо провести ее предварительное исследование.

Алгоритм исследования функции

1. Найти область определения $D(y)$ и область допустимых значений $E(y)$ функции.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы .
6. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
7. Построить график функции по результатам исследования.

Пример . Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. Область определения $D(f)$ функции – вся числовая ось, за исключением точек $x=-2$ и $x=2$, т.е. $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

2. Функция непериодическая; исследуем ее на четность и нечетность:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{4-(-x)^2}=-\frac{x^3}{4-x^2}=-f(x)$$

3. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

с осью Oy график пересекается при $x=0$, откуда $y=f(0)=0$, т.е. $M(0;0)$-точка пересечения с осью Oy;

с осью Ox график пересекается, если $f(x)=0$, т.е. $\dfrac{x^3}{4-x^2}=0$, откуда $x=0$. Таким образом, $M(0;0)$ - единственная точка пересечения графика с осями координат.

4. Найдем асимптоты графика функции: $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^3}{4-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^3}{4-x^2}=-\infty$,

т.е. прямая $x=2$ - вертикальная асимптота. Отсюда, в силу симметрии, следует, что прямая $x=-2$ - также вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{4-x^2}=-1$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{4-x^2}=0,$$

т.е. прямая $y=-x$ - наклонная асимптота при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$). Горизонтальных асимптот функция не имеет.

5. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную $y' = \left(\dfrac{x^3}{4-x^2}\right)' = \dfrac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} = \dfrac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}$,

Отсюда видно, что при $x \ge 0$ (рис.17) функция имеет максимум в точке $x = 2\sqrt{3}$ (причем $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \approx -5{,}2$), возрастает на $(0;2)$ и $(2;2\sqrt{3})$ и убывает на $(2\sqrt{3};+\infty)$.

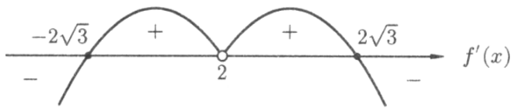


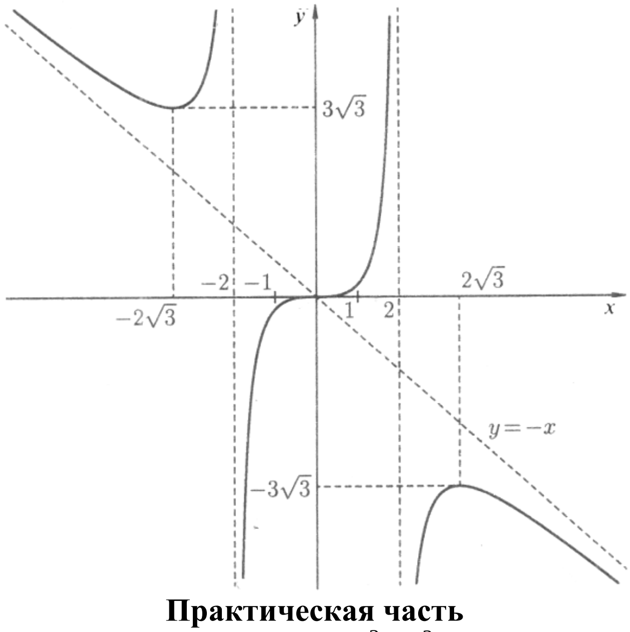
Рис.17

6. Чтобы определить интервалы выпуклости и точки перегиба, вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}.$$

Отсюда ясно, что при $x \ge 0$ функция выпукла вверх (т.е. $f'' < 0$) на $(2;+\infty)$, $x=0$ - точка перегиба.

7. Учитывая накопленную информацию, строим график функции при $x \ge 0$, а затем симметрично отражаем его относительно начала координат (рис. 18).



Практическая часть

1.Исследуйте функцию и постройте график: $y=2x^3-3x^2-12x-1$

2.Исследовать функцию $y = x^2/x+1$

Контрольные вопросы:

1) Назовите схему исследования функции;
2) Дайте определение области определения и множества значений функции;
3) Дайте определение чётной и нечётной функции;
4) Как найти точки пересечения графика функции с осями координат;
5) Дайте определение асимптоты графика функции, назовите виды асимптот;
6) Назовите признаки возрастания (убывания) функции;
7) Назовите условия существования точек экстремума функции;

8) Как найти промежутки выпуклости графика функции;
9) Как найти точку перегиба графика функции?

Практическая работа

Тема: «Нахождение неопределенных интегралов методом замены переменной и по частям»

Цель: совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом замены переменной и по частям, совершенствование умений проверять действие интегрирования дифференцированием.

Методические указания для практической работы

Теоретические сведения

Первообразная функции. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C,$ где C — const .

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C,$ где $F'(x)=f(x), C$ — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x);\qquad d\int f(x)dx=f(x)dx;$
2. $\int dF(x)=F(x)+C;$
3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,\qquad k$ — const;
4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du=C;\quad C=\text{const};$
2. $\int du=u+C;$
3. $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq-1;$

3а. $\int\dfrac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C;$

4. $\int\dfrac{du}{u}=\ln|u|+C;$
5. $\int a^{u}du=\dfrac{a^{u}}{\ln a}+C;$
6. $\int e^{u}du=e^{u}+C;$
7. $\int\cos u\,du=\sin u+C;$
8. $\int\sin u\,du=-\cos u+C;$
9. $\int\dfrac{du}{\cos^2 u}=\text{tg}u+C;$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg}u + C;$ 11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$ 13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$ 15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\text{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\text{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$ 17. $\int \text{tg}u\,du = -\ln\left|\cos u\right| + C;$

18. $\int \text{ctg}u du = \ln\left|\sin u\right| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x = \varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt = F(t) + C,$ то $\int f(x)dx = F(\psi(x)) + C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Пример1. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

а) $\int \cos 4x dx;$ *б)* $\int e^{9x+1}dx;$ *в)* $\int x(2 - x^2)^5 dx$

Решение:

$$а)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{c} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx = \left| \begin{array}{c} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{c} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Интегрирование по частям

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int U dV = UV - \int V dU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\, P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \dfrac{dx}{x}$	

<table>
<tr><td>$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$</td><td>$U = \arcsin kx \to dU = \dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$</td><td rowspan="5">$dV = P_n(x)dx \to$
$\to V = \int P_n(x)dx$</td></tr>
<tr><td>$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$</td><td>$U = \arccos kx \to dU = -\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$</td></tr>
<tr><td>$\int \mathrm{arctg}\, kx\, P_n(x)dx$</td><td>$U = \mathrm{arctg}\, kx \to dU = \dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$</td></tr>
<tr><td>$\int \mathrm{arcctg}\, kx\, P_n(x)dx$</td><td>$U = \mathrm{arcctg}\, kx \to dU = -\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$</td></tr>
<tr><td>$n = 0, 1, 2, \ldots$</td><td></td></tr>
</table>

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 2. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1)\sin 2x dx$; *б*) $\int (1+2x)\ln x dx$.

Решение.

$$à)\ \int (3x-1)\sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \to V = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1)\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int \frac{\cos 2x}{2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

$$б)\ \int (1+2x)\ln x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \to dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \to \\ V = \int (1+2x)dx = x + x^2 \end{array} \right| = \ln x(x+x^2) - \int (x+x^2)\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x(x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-5).

1. $\int \left(5\cos x - 3x^2 + \dfrac{1}{x}\right)dx$. 2. $\int \dfrac{3x^8 - x^5 + x^4}{x^5}dx$. 3. $\int \left(6^x \cdot 3^{2x} - 4\right)dx$.

4. $\int \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$. 5. $\int \dfrac{dx}{1+16x^2}$.

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 6-8).

1. $\int (8x-4)^3 dx$. 2. $\int \dfrac{12x^3+5}{3x^4+5x-3}dx$.

Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям: $\int (x+5)\cos x dx$.

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-5).

$\int\left(6\sin x+4x^3-\frac{1}{x}\right)dx$. $\int\frac{x^9-3x^7+2x^6}{x^7}dx$. $\int\left(7^x\cdot 2^{2x}+5\right)dx$.

$\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 6-8).

$\int(7x+5)^4dx$. $\int\frac{18x^2-3}{6x^3-3x+8}dx$. $\int x^7\cdot e^{x^8}dx$.

Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям: $\int(x-2)\sin x dx$.

Практическая работа

«Вычисление определённого интеграла. Площади плоских фигур»

Вариант 1

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^2(4x^2+x-3)\,dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_2^3(2x-1)^3\,dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+4$, $y=0$, $x=-2$, $x=2$.
4. Скорость движения точки изменяется по закону $v=3t^2+2t+1$ (м/с). Найти путь *S*, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Вариант 2

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^3(2x^2-x+4)\,dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_0^1(3x+1)^4\,dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$.
4. Скорость движения точки изменяется по закону $v=9t^2-8t$ (м/с). Найти путь *S*, пройденный точкой за четвертую секунду.

Практическое занятие

Тема: Действия над матрицами.

Цель: формировать навыки выполнения операций над матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, произведение матриц.

Требования к выполнению практической работы:

1. Оформить задания в тетради для практических работ.
2. Выполнить индивидуальную работу .
3. Ответить на контрольные вопросы

Содержание практической работы.

1. **Выполнение заданий**

Упражнения к практическому занятию:

1. **Даны матрицы:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 5 & 6\\ -3 & 7\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -7 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Можно ли сложить матрицу *A*: с матрицей *B*; с матрицей *C*; с матрицей *D*?

Решение: Матрицу *A* нельзя сложить с матрицей *B*, так как матрица *A* имеет размеры 3×2 , матрица *B* - размеры 2×3, а складывать можно только матрицы одинаковых размеров. Матрицы *A* и *C* имеют одинаковые размеры, поэтому их можно складывать.

Матрицы *A* и *D* имеют одинаковые размеры, следовательно, их можно складывать.

2. **Найти *A+B* , если**

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 6 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение: Так как матрицы имеют одинаковый размер, то их можно складывать. При сложении матриц надо сложить элементы, стоящие на одинаковых местах, т.е.

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 6 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & 0+7 & -2+2\\ -5+3 & 6+4 & -3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ -2 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

3. **Дано:**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4 & -1\\ 6 & 3 & 0 & 11\\ 7 & 8 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Найти: *-3A.*

$$-3A=\begin{bmatrix}-6 & -15 & -12 & 3\\ -18 & -9 & 0 & -33\\ -21 & -24 & -3 & 9\end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы -3 умножить на матрицу *A* нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на -3.

4. **Даны матрицы:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 10\\ 4 & 2 & -2\\ 2 & 7 & 13\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 13 & 1 & 4\\ -5 & 2 & 5\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2\\ 3 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти: *2A+B-3C*.

Решение:

$$2A+B-3C=\begin{pmatrix}2 & 6 & 20\\ 8 & 4 & -4\\ 4 & 14 & 26\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 13 & 1 & 4\\ -5 & 2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -15 & 6\\ 9 & -6 & 9\\ 0 & -3 & 18\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-1-3 & 6+1-(-15) & 20+3-6\\ 8+13-9 & 4+1-(-6) & -4+4-9\\ 4-5-0 & 14+2-(-3) & 26+5-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 22 & 17\\ 12 & 11 & -9\\ -1 & 19 & 13\end{pmatrix}.$$

Самостоятельное выполнение заданий студентами.

1. Найдите сумму матриц $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.Вычислить произведение матриц: $\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 15 & 6 & 2\\ 8 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 5 & 4\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & -3 & -5\end{pmatrix}$..

3.Вычислить произведение матриц: $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 7 & -5\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

4.Вычислить произведение матриц: $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 7 & -5\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

5.Вычислить произведение матриц: $\begin{pmatrix}-7 & 0 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 1\\ 8\\ -2\end{pmatrix}$.

6.Вычислить произведение матриц: $\begin{pmatrix}10\\ 1\\ 8\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется матрицей? Запишите общий вид матрицы размером mxn.
2. Какие матрицы называются равными?
3. Назовите виды матриц.
4. Назовите линейные операции над матрицами.
5. Какие матрицы можно перемножать? Как выполняется умножение?

Тема: Вычисление определителей

Цель: сформировать умение вычислять определители второго, третьего и n-го порядка.

Теоретические сведения к практической работе

Определение. Определителем (детерминантом) второго порядка называют число, которое ставится в соответствие матрицы второго порядка, и вычисляется следующим образом (обозначается Δ, $|A|$, $\det A$):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

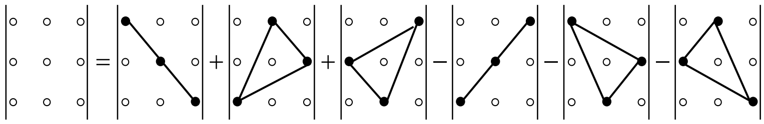
1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 4\cdot 5 = 18 - 20 = -2$,

2) $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 6 - 1\cdot(-5) = -24 + 5 = -19$.

Определение. Определителем (детерминантом) третьего порядка называют число, которое ставится в соответствие матрицы третьего порядка, и вычисляется по правилу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Данный алгоритм называется «правилом треугольника», которое можно представить в виде схемы



Например, вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot(-2) + (-1)\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot(-1) - 2\cdot 5\cdot 2 -$$

$$-3\cdot(-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 4\cdot(-2) = -30 - 2 - 8 - 20 + 3 - 8 = -65.$$

Для вычисления определителя третьего порядка можно пользоваться алгоритмом Саррюса:

1) После записи определителя дописываем его первый и второй столбец и вычисляем по схеме

$$\begin{array}{ccc} (+) & (+) & (+) \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$\begin{array}{ccc} (-) & (-) & (-) \end{array}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Например, вычислим определитель по алгоритму Саррюса

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -4 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & 5 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -6 & 3 & 1 \end{array}\right. = 1\cdot 5\cdot(-6) + (-4)\cdot 4\cdot 3 +$$

$$+2\cdot(-2)\cdot 1 - 2\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 1 - (-4)\cdot(-2)\cdot(-6) =$$

$$= -30 - 48 - 4 - 30 - 4 + 48 = -68.$$

.

МИНОР $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $\qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 5\cdot(-4) = 22$,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2) - 3\cdot 5 = -13.$$

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} *определителя* n*-го порядка (обозначается* A_{ij}*) называется соответствующий ему минор со знаком*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, \text{ если } (i+j) - \text{четное число;} \\ -M_{ij}, \text{ если } (i+j) - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Например, для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 3\cdot 5 = 12 - 15 = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(4\cdot 9 - 6\cdot 7) = -(36-42) = -(-6) = 6.$$

9) **(Теорема Лапласа)** Определитель равен сумме произведений элементов некоторого столбца (строки) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Например, для определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

Решение

1) Вычислим определитель.

а) по правилу треугольника.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot(-2) + (-3)\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 2\cdot 4 - (-3)\cdot(-1)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot(-2) =$$

$$= 2 - 45 + 16 - 12 - 10 + 12 = -37.$$

б) по алгоритму Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{matrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 4 + (-3)\cdot 3\cdot 5 - (-3)\cdot(-1)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot(-2) =$$

$$= 2 - 45 + 16 - 12 - 10 + 12 = -37.$$

в) по теореме Лапласа.

Разложим определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 3\cdot A_{21} + 4\cdot A_{31} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11} + 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot M_{21} +$$

$$+ 4\cdot(-1)^{3+1}\cdot A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2) - 2\cdot 5 -$$

$$-3(2\cdot(-2) - (-3)\cdot 5) + 4(2\cdot 2 - (-3)\cdot(-1)) = 2 - 10 - 3(-4+15) + 4(4-3) =$$

$$= -8 - 33 + 4 = -37.$$

Содержание практической работы:

1 вариант Вычислить определители

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 13 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$; **7)** $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix}$; **8)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

2 вариант. Вычислить определители

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 13 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$; **7)** $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix}$; **8)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

Практическая работа
«Решение систем линейных уравнений третьего порядка методом Крамера»

Цели работы:

- расширить представление о методах решения СЛУ и отработать алгоритм решения СЛУ методом Крамера;
- развивать логическое мышление студентов, умение находить рациональное решение задачи;
- воспитывать у студентов аккуратность и культуру письменной математической речи при оформлении ими своего решения.

Решите систему уравнений по формулам Крамера

ВАРИАНТ 1

1) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2; \\ 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y + 2z = -3; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x + y + 3z = 3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$

ВАРИАНТ 2

1) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10; \\ x + 5y - 2z = -15; \\ 2x - 2y - z = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -3; \\ x + 5y - z = -1; \\ 3x + y + 4z = 11. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y + z = 2; \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

Практическая работа
Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Цель: научиться решать системы линейных уравнений с применением матричного метода.

В матричном методе решения систем линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

которые в матричной форме записываются как A·X = B, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - основная матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных переменных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица свободных членов.

Решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле X = A^{-1} · B, т.е. решение находится с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Вариант 1

1. Решить систему линейных уравнений третьего порядка матричным методом.

а) $\begin{cases} 5x + 2y - z = -1, \\ 3x - y + 3z = -4, \\ x + 2y - 3z = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = -4, \\ 3x + 4y - 3z = 1, \\ 4x + 5y - 3z = -1. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y - z = -1, \\ 3x + 3y + 2z = 7, \\ 2x - y - 3z = 8. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решить систему линейных уравнений третьего порядка матричным методом.

а) $\begin{cases} 3x + y + z = 2, \\ 5x + 3y + 2z = -1, \\ x - y + 4z = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - z = 2, \\ -4x + 3y - z = 3, \\ 3x - 2y - 2z = 11. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y - 2z = 3, \\ 4x + 5y + 4z = -3, \\ 3x + 3y - 5z = 8. \end{cases}$

Контрольные вопросы

Запишите систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме.

Практическая работа

Тема: ***«Вычисление вероятностей событий по классической формуле вероятности»***

Цель: формирование умений решать задачи, используя классическую формулу вероятности;

закрепление умений решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями; решать задачи, используя правила комбинаторики.

Методические указания и теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

<u>*Пример 1.*</u> Пусть в урне содержится ***6*** одинаковых шаров, причем ***2*** из них - красные, ***3*** - синие и ***1*** - белый. Какова возможность вынуть наудачу из урны цветной шар? Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается можно. Это число и называется вероятностью события ***A*** (появления цветного шара). Таким образом, ***вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события***.

Каждый из возможных результатов испытания (в примере 4, испытание состоит в извлечении шара из урны) называется ***элементарным исходом***.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, называются ***благоприятствующими*** этому событию. В примере 4 благоприятствуют событию ***A*** (появление цветного шара) 5 исходов.

События называются ***равновозможными***, если есть основания считать, что не одно из них не является более возможным, чем другое.

<u>*Пример 2*</u>. Появление того или иного числа очков на брошенном игральном кубике – равновозможные события.

Вероятностью P(A) события ***A*** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. ***Вероятность P(A)*** события ***A*** определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где ***m*** – число элементарных исходов, благоприятствующих ***A***; ***n*** – число всех возможных элементарных исходов испытания.

В примере 4 всего элементарных исходов ***6***; из них ***5*** благоприятствуют событию ***A***. Следовательно, вероятность того что взятый шар окажется цветным, равна ***P(A) = 5/6***.

<u>*Пример 3*</u>. Определить вероятность выпадения нечётного числа очков на кости.

Решение. При бросании кости событие ***A*** – «выпало нечётное число очков» можно записать как подмножество {1, 3, 5} пространства исходов {1, 2, 3, 4, 5, 6} (рис. 1).

Число всех равновозможных исходов ***n*** = 6, а число благоприятных событию ***A*** – ***m*** = 3. Следовательно,

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}.$$

<u>*Пример 4*</u>. В урне находится ***7*** шаров: ***2*** белых, ***4*** черных и 1 красный. Вынимается один шар наугад. Какова вероятность того, что вынутый шар будет чёрным?

Решение. Занумеруем шары. Пусть, например, шары с номерами ***1*** и ***2*** – белые, с номерами ***3, 4, 5*** и ***6*** – чёрные, а красному шару присвоим номер ***7***. Так как мы можем вынуть только один из семи шаров, то общее число равновозможных исходов равно семи (***n* = *7***). Из них ***4*** исхода – появление шаров с номерами ***3, 4, 5*** и***6*** – приведут к тому, что вынутый шар будет чёрным (***m = 4***). Тем самым, вероятность события ***А***, состоящего в появлении чёрного шара, равна $P(A) = \frac{4}{7}$.

Вычислите вероятность того, что вынутый шар будет белым.

<u>*Пример 5*</u>. Вычислить вероятность выпадения в сумме ***10*** очков при бросании пары костей.

Решение. Рассмотрим все равновозможные исходы в результате бросания двух костей (их число равно ***36*** - рекомендуем записать в виде таблицы). Выпадение в сумме ***10*** очков (событие ***А***) возможно в трёх случаях – ***4*** очка на первой кости и ***6*** на второй, ***5*** очков на первой и ***5*** на второй, ***6*** очков на первой и ***4*** на второй. Поэтому вероятность события А (выпадения в сумме ***10*** очков) равна $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

<u>*Пример 6.*</u> Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

Решение.

1) Обозначим событие А - «Вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им билетов». Для вычисления вероятности появления данного события воспользуемся классическим определением вероятности события, согласно которому вероятность определяется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$,

где *m* – число исходов, при которых появляется событие А,

n – общее число элементарных несовместных равновозможных исходов.

2) Определим *n*. Общее число билетов определяется сочетанием по 2 из 60:

$$n = C^2_{60} = \frac{60!}{58! \cdot 2!} = \frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$$

3) Количество билетов, вопросы которых студент знает, определяется сочетанием по 2 из 50:

$$m = C^2_{50} = \frac{50!}{48! \cdot 2!} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$$

4) Определим вероятность события А: $P(A) = \frac{1225}{1770} = 0{,}69.$

Ответ: Вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов равна Р(А) = 0,69. То есть, если будет, например, 100 таких студентов, то 69 из них вытянут билеты, к вопросам которых они подготовлены.

Свойство 1. Вероятность ***достоверного*** события ***А*** равна единице: ***Р(А) = 1***.

Свойство 2. Вероятность ***невозможного*** события ***А*** равна нулю: ***Р(А) = 0***.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между ***нулем*** и ***единицей***: $0 < P(A) < 1$

<u>*Пример 7*</u>. Так как вероятность выпадения ***13*** очков при бросании пары костей – невозможное событие, его вероятность равна ***нулю***.

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. Кроме этого, часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. По этой причине, наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения, в частности ***статистическое определение***.

Статистическое определение вероятности

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события ***A*** называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появлений события A, n – общее число испытаний.

Классическая вероятность вычисляется до опыта, а относительная частота – после опыта.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний велико, то ***относительная частота обнаруживает свойство устойчивости***. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Это постоянное число и есть вероятность появления события.

Таким образом, при достаточно большом количестве испытаний в качестве ***статистической вероятности события*** принимают ***относительную частоту*** или число, близкое к ней.

Содержание практической работы

1. ***Решите задачу:***

Задача 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Задача 2. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

Задача 3. В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Задача 4. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Задача 5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Задача 6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Задача 7. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

Практическая работа

«Составление статистического распределения выборки. Построение гистограммы и полигона частот»

Цель Обобщить знания по обработке информации, по работе с диаграммами и графиками.

Образец выполнения задания

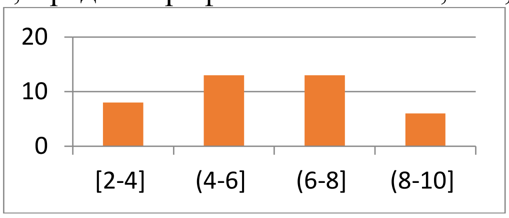
Даны результаты теста по математике:6, 7, 7, 8, 9, 2, 10, 6, 5, 6,7, 3, 7, 9, 9, 2, 3, 2, 6, 6,6, 7, 8, 8, 2, 6, 7, 9, 7, 5,9, 8, 2, 6, 6, 3, 7, 7, 6, 6.

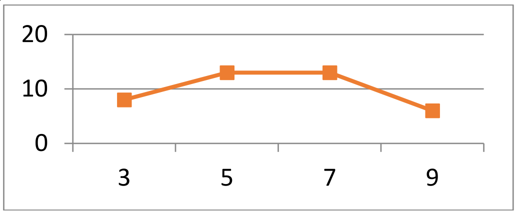
Найти моду, среднее арифметическое, размах и построить полигон и гистограмма.

x_i	**2**	**3**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Всего**
m_i	5	3	2	11	9	4	5	1	40

Интервал	**[2-4]**	**(4-6]**	**(6-8]**	**(8-10]**	**Всего**
m_i	8	13	13	6	40
w_i	0,2	0,33	0,33	0,14	1

Мода = 6, Средняя арифметическая = 6, 125, Размах = 8





1 вариант

В разные месяцы платными услугами организации воспользовались на сумму: 220; 241; 223; 228; 190; 184; 232; 208; 205; 228; 272; 196; 225; 238; 224; 239; 202; 245; 184; 230; 188; 204; 210; 209; 238; 247; 264; 216; 207; 221тыс.руб.

1. Построить вариационный и интервальный ряды.
2. Определите средний заработок организации (средняя арифметическая).
3. Какую сумму организация зарабатывала чаще всего?(Мода)
4. Какова разница между самым большим и самым маленьким поступлением на счет организации? (Размах)
5. Какая сумма получена в середине временного промежутка? (Медиана)
6. Построить гистограмму и полигон частот.

2вариант

Отдел кадров получил запрос на исследование возрастных особенностей коллектива. В результате просмотра личных дел в произвольном порядке получен результат: 23, 22, 29, 35, 28, 22, 30, 22, 22, 37, 34, 42, 38, 37, 29, 42, 41, 53, 49, 48, 35, 42, 38, 41,53, 50, 49, 25, 27, 37, 35, 35, 42, 38, 37, 35, 40, 41, 35, 34, 35.

1. Построить вариационный и интервальный ряды.
2. Определить средний возраст сотрудников организации (средняя арифметическая).
3. Определить возрастную разницу в данном коллективе?(Размах)
4. Сотрудники какого возраста составляют большую часть коллектива? (Мода)
5. Укажите серединное возрастное значение? (Медиана)
6. Построить гистограмму и полигон частот.

Практическая работа

Тема: Решение экономических задач с применением матриц и систем линейных уравнений
Цель работы: научиться решать экономические задачи методом Крамера, методом Гаусса, вычислять себестоимость продукции с помощью обратной матрицы.

Теоретическая часть

Метод Крамера.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 5x - y + z = 12 \end{cases}.$$

Найдем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 15 - 10 + 2 - 9 = -1$$

Так как $\Delta = -1 \neq 0$, система имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера: $x = \frac{\Delta 1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta 2}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta 3}{\Delta}$

Найдем определители $\Delta 1, \Delta 2, \Delta 3$ и подставим полученные значения в формулы Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 10 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 0 & 38 \\ 13 & 0 & 29 \\ 5 & -1 & 12 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 17 & 38 \\ 13 & 29 \end{vmatrix} = 17 \cdot 29 - 13 \cdot 38 = 493 - 494 = -1 \Rightarrow z = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Ответ: x = 2, y = -1, z = 1.

Метод Гаусса.

Метод Гаусса, называемый также методом последовательного исключения неизвестных, состоит в следующем. При помощи элементарных преобразований систему линейных уравнений приводят к такому виду, чтобы её матрица из коэффициентов оказалась **трапециевидной (то же самое, что треугольной или ступенчатой) или близкой к трапециевидной (прямой ход метода Гаусса)**

Пример 2. Решить систему линейных уравнений, применяя обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = 8 \\ z = 3 \end{cases}$$

Решение. В данной трапециевидной системе переменная z однозначно находится из третьего уравнения. Подставляем её значение во второе уравнение и получаем значение переменой y:

$$y + 6 = 8$$

$$y = 2$$

Теперь нам известны значения уже двух переменных - z и y. Подставляем их в первое уравнение и получаем значение переменной x:

$x+2+3=6$

$x=1$

Таким образом, получили решение системы уравнений:

$(x=1;\ y=2;\ z=3)$

Пример 3**.** Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1,P_2,P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый элемент a_{ij} (i=1,2,3; j=1,2) показывает, сколько единиц продукции j- типа расходуется на производства единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой C=(100 80 130), стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом

$B=\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Решение. Затраты 1 –го сырья составляют $S_1=2\cdot100+5\cdot80+1\cdot130=730$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение

$S=C\cdot A=(100\ 80\ 130)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=(730\ 980)$

Тогда общая стоимость сырья $Q=730\cdot30+980\cdot50=70900$ ден. ед. может быть записана в матричном виде $Q=S\cdot B=(CA)B=(70900)$.Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу

$R=A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а затем общую стоимость сырья

$Q=C\cdot R=(100\ 80\ 130)\cdot\begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}=(70900)$

Задания для практической работы

1.Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

Вариант №1

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=-5 \\ -2x_1+2x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2+3x_3=11 \end{cases}$$

Вариант №2

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=29 \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$$

2.Задача.

Вариант №1.

Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1,P_2,P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый элемент a_{ij} (i=1,2,3; j=1,2) показывает, сколько единиц продукции j- типа расходуется на производства единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой C=(50 50 100), стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Вариант №2

Предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1,P_2,P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, где каждый элемент a_{ij} (i=1,2,3; j=1,2) показывает, сколько единиц продукции j- типа расходуется на производства единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой C=(30 50 50), стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается метод Крамера?
2. В чем заключается метод Гаусса?
3. Понятие обратной матрицы.
4. Как вычислить себестоимость продукции с помощью обратной матрицы?

4 КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

Предметом оценки являются умения и знания, общие и профессиональные компетенции. Оценка освоения предусматривает *экзамен.*

1. Условия проведения –устная и письменная форма.

2 Время выполнения задания – 45 минут.

Примерный перечень заданий

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x}\right)^{5x}$.
2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-x^3+1}{2x^4+x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^3+2x}$.

3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 17x}{\sin 5x}$.
4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$.
5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{x^2-2x}$.
6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2-10x+16}{x-8}$.
7. Исследовать функцию $f(x)=\frac{5x}{x-6}$ на непрерывность в точке $x_0=6$.
8. Исследовать функцию $f(x)=3x^2-x^3$ и построить ее график.
9. Вычислить значение производной следующих функций в точке $x_0=4$:

а) $f(x)=8x^2-\ln x$; б) $f(x)=x^3+5x$.

10. Найти производную функции $y=\left(x^4-5x^2+x\right)^7$.
11. Найти производную функции $y=\frac{11x-8}{2x+4}$.
12. Найти производную функции $y=e^{2x^5-8}$.
13. Найти производную функции $y=\ln\left(8x^4-3x^2+2\right)$.
14. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{4-x^3+x^2-2x}{x}dx$.
15. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int x^2\cdot e^{x^3}dx$.
16. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int(6x+11)^4dx$.
17. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int\cos(6x-1)dx$.
18. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int\sin^6 x\cdot\cos x dx$.
19. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^3(5x+1)dx$.

20. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 (x-5)x\,dx$.

21. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 \frac{2x^3+x^4}{x^2}dx$.

22. Найти матрицу *C=3A+B*, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

23. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
24. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
25. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=4, \\ x_1+4x_2-x_3=7, \\ 2x_1+x_2+x_3=3. \end{cases}$$

26. Скорость движения точки изменяется по закону $v=5t^2+4t+2$ (м/с). Найти путь *s*, пройденный точкой за 4 с от начала движения.
27. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=3$, вокруг оси *Ox*.
28. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
75 ÷ 89	4	хорошо
51 ÷ 74	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КОЛЛЕДЖ БИЗНЕСА И ТЕХНОЛОГИЙ

Экзаменационный билет № … по специальности: по дисциплине: курс: семестр:	Рассмотрено на заседании цикловой комиссии ________________________ Председатель : ________________________ « »___________20___г.
Текст задания Преподаватель ___________И.О. Фамилия (подпись)	

К комплекту экзаменационных билетов прилагаются разработанные преподавателем и утвержденные на заседании цикловой комиссии критерии оценки по дисциплине.

Экзаменационные вопросы

1. Матрицы, действия над матрицами.
2. Определители 1-го, 2-го, 3-го порядков. Правило треугольников.
3. Определители n-го порядка. Теорема Лапласа.
4. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
5. Ранг матрицы. Алгоритм вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
6. Система линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
7. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах.
8. Предел функции при x, стремящемся к бесконечности. Замечательные пределы. Число e.
9. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точка непрерывности функции. Точка разрыва функции. Свойства непрерывных функций. Приращение аргумента. Приращение функции.

10. Производная функции. Дифференциал функции. Геометрический смысл производной. Механический смысл производной.
11. Таблица производных. Понятие сложной функции. Производная сложной функции.
12. Схема исследования функции. Область определения функции. Множество значений функции. Четность и нечетность функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства функции. Возрастание и убывание функции, правило нахождения промежутков монотонности. Точки экстремума функции, правило нахождения экстремумов функции.
13. Производные высших порядков. Физический смысл второй производной. Исследование функции с помощью второй производной.
14. Первообразная. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
15. Таблица неопределенных интегралов.
16. Методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод замены переменной (метод подстановки); метод интегрирования по частям.
17. Определенный интеграл. Понятие интегральной суммы. Достаточное условие существования определенного интеграла (интегрируемости функции).
18. Основные свойства определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла.
19. Методы вычисления определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.
20. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.
21. Функции нескольких переменных. Частные производные.

33.Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятности.

34.Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей.

35.Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины.

36. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия случайной величины. Среднее квадратичное случайной величины

Экзаменационные задания

1.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{3x}\right)^{5x}$.

2.Вычислить пределы:а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-x^3+1}{2x^4+x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x^3+2x}$.

3.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 17x}{\sin 5x}$.

4.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

5.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{x^2-2x}$.

6.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-10x+16}{x-8}$.

7.Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{5x}{x-6}$ на непрерывность в точке $x_0=6$.

8.Исследовать функцию $f(x)=3x^2-x^3$ и построить ее график.

9.Вычислить значение производной следующих функций в точке $x_0=4$:

а) $f(x)=8x^2-\ln x$; б) $f(x)=x^3+5x$.

10.Найти производную функции $y=\left(x^4-5x^2+x\right)^7$.

11.Найти производную функции $y=\dfrac{11x-8}{2x+4}$.

12.Найти производную функции $y=e^{2x^5-8}$.

13.Найти производную функции $y=\ln\left(8x^4-3x^2+2\right)$.

14.Найти неопределенный интеграл $\int\dfrac{4-x^3+x^2-2x}{x}dx$.

15.Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int x^2\cdot e^{x^3}dx$.

16.Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int(6x+11)^4dx$.

17.Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int\cos(6x-1)dx$.

18Вычислить определенный интеграл $\int_0^3(5x+1)dx$.

19.Вычислить определенный интеграл $\int_0^1(x-5)xdx$.

20.Вычислить определенный интеграл $\int_0^2\dfrac{2x^3+x^4}{x^2}dx$.

21.Скорость движения точки изменяется по закону $v=5t^2+4t+2$ (м/с). Найти путь *s*, пройденный точкой за 4 с от начала движения.

22.Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=3$, вокруг оси *Ox*.

23.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

24.Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не требует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9, для второго – 0,8, для третьего -0,85. Найти вероятность того, что в течение часа хотя бы один станок потребует внимания рабочего?

25.Случайная величина X распределена по закону

xi	0,5	1	1,5	2
pi	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти математическое ожидание случайной величины X.

26 Случайная величина X распределена по закону

xi	1	3	4
pi	0,2	0, 5	0,7

Найти дисперсию случайной величины X.

27Для выборки, представленной статистическим рядом определить среднее значение.

7	10	15	20	25
7				
ni	4	6	4	2

28Для выборки, представленной статистическим рядом определить дисперсию.

xi	15	16	18	19
ni	1	4	5	2

29.В магазин поступило 30 новых телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор для проверки. Какова вероятность того, что он не имеет скрытых дефектов?
30.Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
75 ÷ 89	4	хорошо
51÷ 74	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

Оценка экзамена	**Требования к знаниям**
«отлично»	Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.
«хорошо»	Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.
«удовлетворительно»	Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.
«неудовлетворительно»	Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

Приложение

Кодификатор (примерный перечень) оценочных средств для оценки знаний, умений и уровня сформированности компетенций

№ п/п Код оценочного средства	*Тип оценочного средства*	*Краткая характеристика оценочного средства*	*Представление оценочного средства в фонде*
1.	Деловая и/или ролевая игра	Совместная деятельность группы обучающихся и преподавателя под управлением преподавателя с целью решения учебных и профессионально-ориентированных задач путем игрового моделирования реальной проблемной ситуации. Позволяет оценивать умение анализировать и решать типичные профессиональные задачи	Тема (проблема), концепция, роли и ожидаемый результат
2.	Разноуровневые учебные задачи и задания	Различают задачи и задания: а) репродуктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать знание фактического материала (базовые понятия, алгоритмы, факты) и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определѐнного раздела дисциплины; б) реконструктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей; в) творческого уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения	Комплект разноуровневых задач и заданий
3.	Расчетно-графическая работа	Средство проверки умений применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом.	Комплект заданий для выполнения расчетно-графической работы
4.	Реферат	Продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой краткое изложение в письменном виде полученных результатов теоретического анализа определенной темы, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы, приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее.	Темы рефератов
5.	Доклад, сообщение	Продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной темы.	Темы докладов, сообщений
6.	Тест	Средство контроля, направленное на проверку уровня освоения контролируемого теоретического и практического материала по	Фонд тестовых заданий

		дидактическим единицам дисциплины или профессионального модуля. Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающихся	
7.	Практические работы (практическое задание)	Это задания, с помощью которых у учащихся формируются и развиваются правильные практические действия.	Виды: наблюдение, измерение, опыт, конструирование и др. задания для практических работ
8.	Наблюдение	Инструмент сбора информации для установления фактов	Цель, объекты наблюдения, образец листа для фиксирования результатов наблюдения
9.	Экзамен	Включает в себя перечень вопросов по УД	компоновка вариантов, билеты